

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОСВЕЩЕНИЯ»

Институт реализации государственной политики и профессионального
развития работников образования
Методический центр

**МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ОБУЧЕНИЮ МАТРИЧНОМУ МЕТОДУ
РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
В УЧЕБНОМ КУРСЕ «АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА» В 10 КЛАССЕ
(УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ)**

Автор: Баракова Е.А., кандидат педагогических наук, ведущий эксперт методического центра Института реализации государственной политики и профессионального развития работников образования ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения»

**Москва
2024**

Работа выполнена в рамках ГЗ 2024 от 22.01.2024 № 073-03-2024-77 «Выполнение работы по научно-методическому, методическому обеспечению образовательной деятельности федеральным государственным автономным образовательным учреждением высшего образования «Государственный университет просвещения» в целях реализации мероприятий по формированию и обеспечению функционирования единой федеральной системы научно-методического сопровождения педагогических работников и управленческих кадров на 2024 год».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Проектирование учебных занятий по теме «Матричный метод решения систем линейных уравнений».....	6
1.1. Занятие 1. Метод Крамера.....	7
1.1.1. Теорема Крамера. Условия существования решений системы.....	7
1.1.2. Определитель 2-ого порядка. Правило Крамера	12
1.1.3. Тренажер по теме «Решение систем линейных уравнений методом Крамера».....	16
1.2. Занятие 2. Матричный метод решения систем линейных уравнений.....	17
1.2.1. Понятие матрицы, определителя матрицы системы линейных уравнений	17
1.2.2. Действия с матрицами	21
1.2.3. Тренажер по теме «Решение систем линейных уравнений матричным методом».....	24
1.3. Занятие 3. Метод Гаусса.....	26
1.3.1. Методика введения решения систем линейных уравнений при условии $n \geq 2$ методом Гаусса.....	26
1.3.2. Алгоритм метода Гаусса для решения систем линейных уравнений при условии $n \geq 2$	28
1.3.3. Тренажер по теме «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»	30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	32
ЛИТЕРАТУРА	33

ВВЕДЕНИЕ

Введение в школьную программу по математике в учебный курс «Алгебра и начала математического анализа» в 10 классе на углубленном уровне темы «Матричный метод решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными» – это ещё один интересный формат организации преемственности между школой и вузом, возможность повышения мотивации изучения математики, формирование интереса к истории развития математики, к ученым-математикам, воспитание понимания значимости фундаментальных математических знаний в жизни, в дальнейшем продолжении образования.

В федеральной рабочей программе в разделе «Множество действительных чисел. Многочлены. Рациональные уравнения и неравенства. Системы линейных уравнений», (24ч.), предлагается следующая последовательность изучения данного метода решения систем линейных уравнений:

- Матрица системы линейных уравнений.
- Определитель матрицы 2×2 , его геометрический смысл и свойства; вычисление его значения; применение определителя для решения системы линейных уравнений.
- Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений.

Соответственно, ожидаемые предметные результаты:

- оперировать понятиями: система линейных уравнений, матрица, определитель матрицы;
- использовать свойства определителя 2×2 для вычисления его значения, применять определители для решения системы линейных уравнений;
- моделировать реальные ситуации с помощью системы линейных уравнений, исследовать построенные модели с помощью матриц и определителей, интерпретировать полученный результат.

Организация педагогической деятельности по подготовке к изучению данной темы может быть следующей:

- обеспечение повторения раздела «Уравнения и системы уравнений: системы линейных уравнений» курса алгебры 7 класса, так как именно в этом курсе изучают и понятие системы линейных уравнений с двумя переменными, и методы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными. Представим фрагмент федеральной рабочей программы по математике.

Федеральная рабочая программа | Математика. 7-9 классы (углубленный уровень)

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

7 КЛАСС

Название раздела (темы) курса	Количество часов	Основное содержание	Основные виды деятельности обучающихся
Уравнения и системы уравнений: системы линейных уравнений	14	Уравнение с двумя переменными. График линейного уравнения с двумя переменными. Системы линейных уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы линейных уравнений с двумя переменными. Решение систем линейных уравнений с двумя переменными методом подстановки и методом сложения. Система двух линейных уравнений с двумя переменными как модель реальной ситуации	Строить в координатной плоскости график линейного уравнения с двумя переменными; пользуясь графиком, приводить примеры решения уравнения. Находить решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Составлять и решать систему двух линейных уравнений по условию задачи, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат

- Актуализация текстовых задач формата ОГЭ по математике, решение которых предполагает составление и решение систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Приведем пример:

«Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 20 часов, а Володя и Игорь — за 30 часов. За сколько минут мальчики покрасят забор, работая втроем?»

- Построение следующей последовательности обучения матричному методу решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными:

- Теорема Крамера. Условия существования решений системы.
- Понятие «определитель 2-ого порядка». Правило Крамера.
- Понятие «определитель 3-его порядка». Правило треугольника.
- Понятие матрицы: матрицы коэффициентов, матрицы вектора-столбца неизвестных, матрицы вектора-столбца свободных членов, обратной матрицы.

- Действия с матрицами: умножение матрицы на число, умножение матриц, транспонирование матриц.
- Матричный метод решения систем линейных уравнений.
- Метод Гаусса в решении систем линейных уравнений.
- Решение систем линейных уравнений различными методами.
- Решение прикладных задач с помощью систем линейных уравнений.
- Организация внеурочной деятельности по математике, выполнение коллективных проектов.

Методические материалы содержат методические рекомендации проектирования учебных занятий по обучению матричному методу решения систем линейных уравнений, тренажеры для закрепления алгоритмов решения систем линейных уравнений. Они адресованы учителям математики, методистам, студентам вузов, магистрантам и аспирантам по направлению «педагогическое образование», профиль подготовки «математика» для обучения решению систем линейных уравнений матричным методом и развития функциональной грамотности у обучающихся 10 классов. Материалы прошли профессионально-общественную экспертизу и получили три положительных экспертных заключения:

Есин В.А. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики НИУ «БулГУ»;

Капалкина О.А. – учитель математики МБОУ «СОШ № 1 ст. Зеленчукской им. В.П. Леонова»;

Щербакова Э.Н. – учитель математики ГБОУ «Белгородский инженерный юношеский лицей интернат».

1. Проектирование учебных занятий по теме «Матричный метод решения систем линейных уравнений»

Матричный метод применяется в решении систем линейных уравнений с двумя, тремя, ... n неизвестными.

Представим методику обучения матричному методу решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными системой дидактических целей:

- *Введение понятия* определителя 2×2 .
- *Оперирование понятием* определителя 2×2 при решении систем линейных уравнений методом Крамера.
- *Введение понятия:* матрицы коэффициентов системы, определителя системы, обратной матрицы, вектора-столбца.
- *Введение основных формул и правила* умножения матрицы коэффициентов системы на вектор.
- *Алгоритмизирование* решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными матричным методом.
- *Закрепление* матричного метода решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными.
- *Оперирование* матричным методом решения систем линейных уравнений с двумя неизвестными.

Спроектируем занятия по изучению матричного метода решения систем линейных уравнений в соответствии с предложенной методикой обучения.

Тематическое планирование (10 класс, углубленный уровень)

Название темы	Основное содержание	Количество часов	Основные виды деятельности обучающихся
Матричный метод решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными (10 ч)	Метод Крамера	3ч	Находить определитель 2-ого порядка системы, определители с замененными коэффициентами при неизвестном системы соответственными свободными членами, знать формулы для нахождения неизвестных системы. Проверять правильность решения системы методами,

			изученными ранее: сложения, подстановки, графического
	Понятие матрицы. Действия с матрицами	2ч	Составлять матрицы коэффициентов системы, определителя системы, обратной матрицы, матрицы вектора-столбца. Знать правило умножения матрицы коэффициентов системы на матрицу вектора-столбца
	Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными матричным методом	2ч	Оперирование понятиями матрицы коэффициентов системы, определителя системы, обратной матрицы, матрицы вектора-столбца при решении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Владение алгоритмом решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными
	Метод Гаусса Решение систем линейных уравнений различными методами	2ч	Владение алгоритмами решения систем линейных уравнений. Применение умений решать системы линейных уравнений в смежных дисциплинах в прикладных и жизненно-ориентированных задачах

1.1. Занятие 1. Метод Крамера

1.1.1. Теорема Крамера. Условия существования решений системы

Обучающиеся 10-х классов с углубленным изучением математики достаточно уверенно оперируют и понятием системы уравнений, и алгоритмами решения систем уравнений не только на уроках математики, но и при выполнении заданий смежных дисциплин, например, химии, физики, биологии, информатики. Поэтому важно на первом занятии уделить время для мотивации к изучению нового для них метода решения систем линейных уравнений, подвести к «открытию» эффективности применения метода Крамера в решении систем линейных уравнений.

Подводкой к введению метода Крамера для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными может стать деятельность обучающихся в соревновательной (игровой) форме для актуализации их знаний и умений решать системы линейных уравнений из курса алгебры 7-ого класса.

Приведём примеры упражнений для организации такой деятельности обучающихся.

1 Упражнение

Выберите из предложенных систем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Ответ обоснуйте.

1 $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x^2 - 2y = 6 \end{cases}$, 2 $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 2z = 6 \end{cases}$, 3 $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ \sqrt{2} \cdot x - y = 6 \end{cases}$.

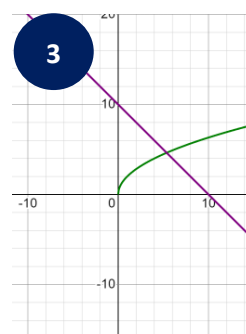
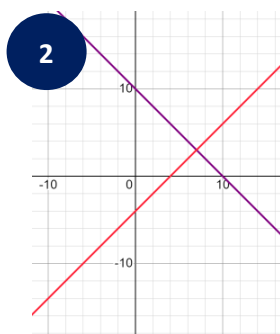
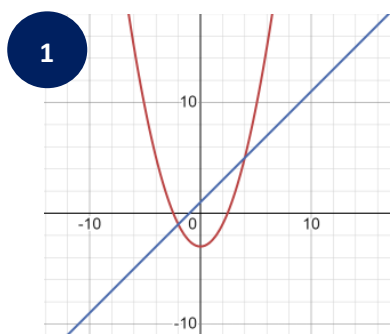
Ответ: 3.

Обоснование: определение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Определение. «Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y называется система уравнений вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – некоторые числа».

2 Упражнение

Выберите из предложенных рисунков графическое решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Обоснуйте выбор.



Ответ: 2.

Обоснование. Графиком линейного уравнения является прямая. Решением системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными являются координаты точки пересечения прямых, задающих линейные уравнения, входящие в систему.

3 Упражнение

Установите соответствие между алгоритмами решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и названиями методов решения

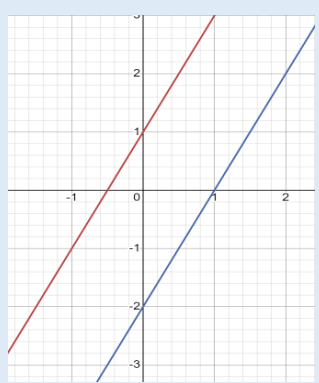
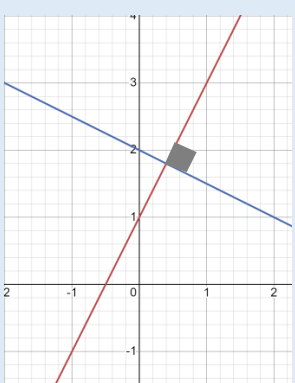
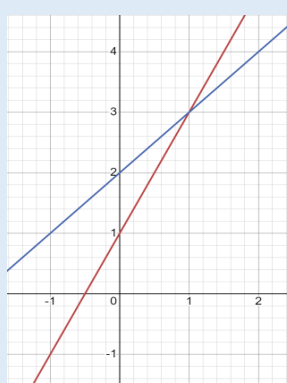
АЛГОРИТМЫ		НАЗВАНИЯ МЕТОДОВ	
1	1. Уравнять модули коэффициентов при одном неизвестном. 2. Выполнить сложение (вычитание) уравнений системы . 3. Решить объединенное уравнение и найти значение одной переменной. 4. Вычислить второе неизвестное .	А	Метод подстановки
2	1. Выразить одну (любую) переменную из любого уравнения через другую переменную. 2. Подставить полученное выражение во второе уравнение . 3. Решить уравнение с одной переменной. 4. Найденное значение переменной подставить в первое уравнение и найти значение второй переменной	Б	Метод сложения
3	1. Построить график первого уравнения ; 2. Построить график второго уравнения ; 3. Определить координаты точки пересечения графиков (решением системы уравнений являются координаты найденной точки).	В	Графический метод

А	Б	В
2	1	3

Ответ: 2 1 3.

4 Упражнение

Уточните соответствие взаимного расположения прямых на рисунках (соответственно число решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными) от свойств угловых коэффициентов k_1 и k_2 .

Взаимное расположение прямых на плоскости					
1		2		3	
Свойства угловых коэффициентов, количество решений системы двух линейных уравнений					
А	$k_1 \neq k_2$ 1 решение	Б	$k_1 = k_2$ решений нет	В	$k_1 \cdot k_2 = -1$ 1 решение

А	Б	В
3	1	2

Ответ: 3 1 2.

5 Упражнение

Решите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными одним из методов:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases}.$$

Метод сложения

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \cdot (-2) \\ x + 4y = -3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ x + 4y = -3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} -5x = -5 \\ x + 4y = -3 \end{cases}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + 4y = -3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Ответ: (1; -1).

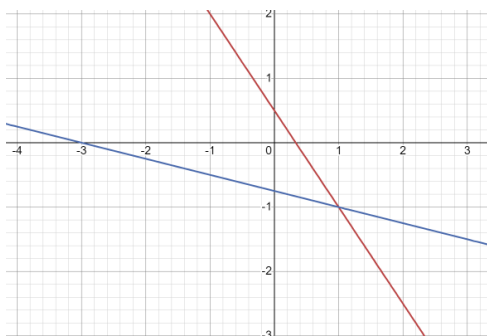
Метод подстановки

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (-4y - 3) + 2y = 1 \\ x = -4y - 3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} -10y = 10 \\ x = -4y - 3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ответ: (1; -1).

Графический метод

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases}.$$



Ответ: (1; -1).

6 Упражнение

После проверки решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными, обсуждения результатов, предлагаем провести экспромт-исследование текста теоремы Крамера.

Теорема.

«Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами.»

Для организации диалога с обучающимися возможны следующие вопросы.

- 1) Какой термин наиболее часто встречается в тексте, но является незнакомым?
(Определитель)
- 2) Возможно ли по тексту понять, что является объектом изучения? (Нет. Нагляднее пояснить на примере).

Пример линейной системы двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases}.$$

Пример системы трех линейных уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ x - 4y + z = -1 \\ 2x - 2y + 6z = 1 \end{cases}.$$

- 3) Какова особенность систем линейных уравнений, в которых используется метод Крамера? (Метод Крамера используется в решении систем, в которых число неизвестных равно числу уравнений).
- 4) Все ли случаи решения системы линейных уравнений рассмотрены в тексте теоремы? (Нет. Есть только случай, когда система линейных уравнений имеет единственное решение).
- 5) Как наглядно можно показать все случаи решения системы линейных уравнений: имеет единственное решение, имеет бесконечное множество решений, не имеет решений? (Выполнить геометрическую интерпретацию взаимного расположения плоскостей (Рисунок 1)).

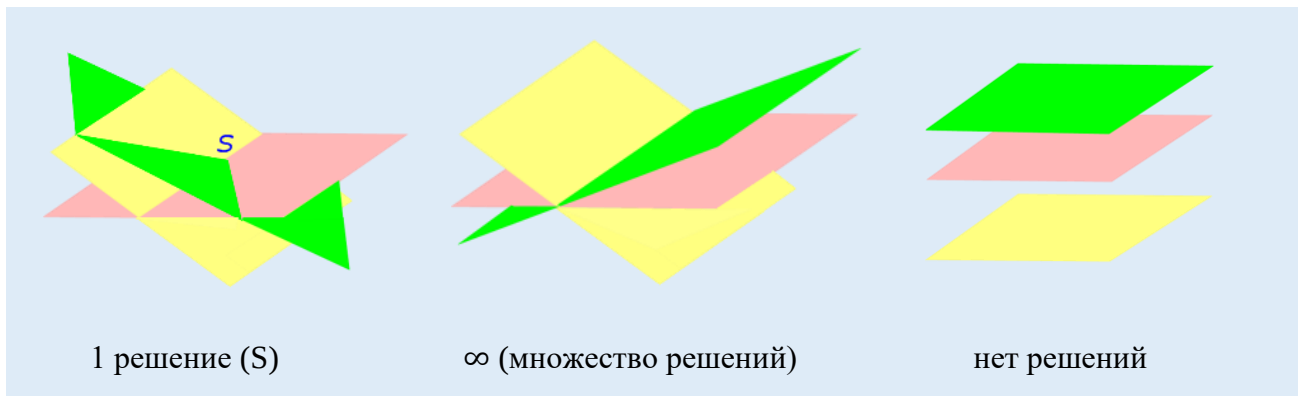
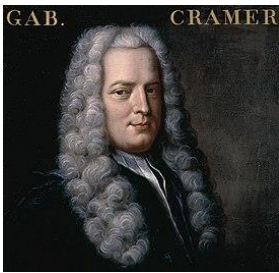


Рисунок 1

- 6) Придумайте варианты систем линейных уравнений с тремя неизвестными для каждого случая.
- 7) Какое понятие из текста необходимо объяснить? (Понятие определителя 2-ого порядка).



В заключение диалога можно предложить экскурс в историю: повествование (фильм, презентация, посещение виртуального музея) о жизни и деятельности Габриэля Крамера – швейцарского математика, автора матричного метода, одного из создателей линейной алгебры (Рисунок 2).

Рисунок 2

1.1.2. Определитель 2-ого порядка. Правило Крамера

Правило Крамера – метод решения системы линейных алгебраических уравнений, имеющей единственное решение, с помощью **определителей**.

Правило представляет собой совокупность формул:

- а) для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} k_{11}x + k_{12}y = c_1 \\ k_{21}x + k_{22}y = c_2 \end{cases}.$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21} \quad (1), \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} c_1 & k_{12} \\ c_2 & k_{22} \end{vmatrix} = c_1 \cdot k_{22} - k_{12} \cdot c_2 \quad (2), \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} k_{11} & c_1 \\ k_{21} & c_2 \end{vmatrix} = k_{11} \cdot c_2 - c_1 \cdot k_{21} \quad (3), \end{aligned} \right\}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Ответ: (x; y).

б) для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} k_{11}x + k_{12}y + k_{13}z = c_1 \\ k_{21}x + k_{22}y + k_{23}z = c_2 \\ k_{31}x + k_{32}y + k_{33}z = c_3 \end{cases} .$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} = (k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} + k_{12} \cdot k_{23} \cdot k_{31} + k_{13} \cdot k_{21} \cdot k_{32}) - \\ - (k_{13} \cdot k_{22} \cdot k_{31} + k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{11} + k_{33} \cdot k_{21} \cdot k_{12}) \quad (1^*),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & k_{12} & k_{13} \\ c_2 & k_{22} & k_{23} \\ c_3 & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} = (c_1 \cdot k_{22} \cdot k_{33} + k_{12} \cdot k_{23} \cdot c_3 + k_{13} \cdot k_{32} \cdot c_2) - \\ - (k_{13} \cdot k_{22} \cdot c_3 + k_{23} \cdot k_{32} \cdot c_1 + k_{33} \cdot k_{12} \cdot c_2) \quad (2^*),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} k_{11} & c_1 & k_{13} \\ k_{21} & c_2 & k_{23} \\ k_{31} & c_3 & k_{33} \end{vmatrix} = (k_{11} \cdot c_2 \cdot k_{33} + k_{21} \cdot k_{13} \cdot c_3 + k_{23} \cdot k_{31} \cdot c_1) - \\ - (k_{13} \cdot c_2 \cdot k_{31} + k_{23} \cdot k_{11} \cdot c_3 + k_{33} \cdot k_{21} \cdot c_1) \quad (3^*),$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Как объяснить обучающимся такие «суровые» формулы и не «отбить охоту» изучать данную тему?

Можно начать с правила Крамера на конкретной системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными, отрабатывая алгоритм решения системы, проговаривая названия коэффициентов.

Пример.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 4y = -3 \end{cases} .$$

1) «Составим **определитель системы** 2-ого порядка: запишем в первой **строке** коэффициенты при неизвестных x и y первого уравнения, входящего в систему, а во второй строке – x и y второго уравнения так, чтобы коэффициенты одной и той же переменной расположились друг под другом. То есть: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Вычислим определитель по схеме: $\Delta = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$ ».

- 2) «Составим определитель для нахождения переменной x : заменим коэффициенты первого столбца на свободные члены. То есть:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель для нахождения переменной x по схеме:

$$\Delta_x = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 4 + 6 = 10.$$

- 3) «Составим определитель для нахождения переменной y : заменим коэффициенты второго столбца на свободные члены. То есть:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель для нахождения переменной y по схеме:

$$\Delta_y = 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -9 - 1 = -10.$$

- 4) Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{10} = -1. \quad \underline{\text{Ответ:}} (1; -1).$$

Теперь можно, используя ассоциации (например, поле для игры в «крестики-нолики»), предложить обучающимся составить правило Крамера на символическом языке.

Возможно, появится следующий вариант для систем двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1 \\ b_1x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ для поля:}$$

	1	2
a		
b		

Соответственно формулы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \quad (1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot a_2 \quad (2),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot c_1 \quad (3).$$

Поскольку предложенные обучающимися варианты могут быть самыми разными, то возникает необходимость «договориться» обозначать коэффициенты при неизвестных x и y одной буквой k , а цифры 1 и 2 присвоить и строкам, и столбцам. Тогда у всех обучающихся получатся единые формулы решения систем двух

линейных уравнений с двумя неизвестными. Они «откроют» их сами! Можно проверить осмысление обучающимися индексов при коэффициентах в следующем упражнении.

Упражнение.

Назовите коэффициенты, проговаривая индексы, в следующих системах линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 2y = -1 \\ x + 5y = 7 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} x - 3y + 2z = -1 \\ 2x + 5y - z = 4 \\ 4x + y + 3z = 2 \end{cases}.$$

Выполнение пункта (а) не должно вызвать затруднения у обучающихся.

А вот при выполнении пункта (б) могут возникнуть вопросы, так как поле нужно составить уже 3×3 .

Но более важный вопрос при выполнении пункта (б) может быть следующим: «А можно ли решать с помощью определителя систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными?» И, конечно же, учитель должен быть готов к такому вопросу. Но будет эффективнее, если учитель, отвечая, предложит обучающимся не формулы, а схему вычислений по «правилу треугольников».

Педагог может воспользоваться заготовкой Δ из пункта (б).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 1) - (4 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot (-3)) = 15 + 12 + 4 - 40 + 1 + 18 = -20.$$

Имеет смысл повторить алгоритм и для вычисления определителей Δ_x и Δ_y , заменяя коэффициенты при неизвестных свободными членами, и далее, найти решение системы.

Для повышения накала соревновательного момента можно предложить обучающимся самостоятельно закончить решение данной системы, а затем обсудить результат. Для повышения мотивации к изучению алгоритма решения системы линейных уравнений методом Крамера можно сказать обучающимся, что этот метод изучают в вузах в курсе «Линейная алгебра», но на более высоком уровне: с доказательством специальных теорем.

Если после такой деятельности вновь вернуться к решению систем линейных уравнений с помощью определителя 2-ого порядка, то будет замечен эффект от скорости и осмысленного составления определителей и применения формул Крамера в решении систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Этот уровень будет уже восприниматься обучающимися как базовый, несложный.

Таким образом, методические приемы: «от «простого» к сложному и обратно», «от устной математической речи к символьной записи» и к проговариванию «про себя» – позволят обучающимся освоить метод Крамера на алгоритмизированном уровне и оперировать им при решении текстовых задач.

1.1.3. Тренажер по теме «Решение систем линейных уравнений методом Крамера»

№ 1

Решите систему: $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$. Ответ: $(-11; 31)$.

№ 2

Решите систему: $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$. Ответ: $(4; 2)$.

№ 3

Решите систему: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$. Ответ: $(-2; 3)$.

№ 4

Решите систему: $\begin{cases} 5x + 6y = 0 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$. Ответ: $(-12; 10)$.

№ 5

Решите систему: $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 6x - 5y = 11 \end{cases}$. Ответ: $(1; -1)$.

№ 6

Решите систему: $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y = -2 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$. Ответ: $(-1; 1; 3)$.

№ 7

Решите систему: $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 4z = 13 \\ 5x - 2y + 2z = 7 \end{cases}$. Ответ: $(1; 2; 3)$.

№ 8

Решите систему:
$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 10 \\ 4x - 3y + 2z = 8 \\ 5x - 2y + 6z = 17 \end{cases} . \quad \underline{\text{Ответ:}} (3; 2; 1).$$

№ 9

Решите задачу: «В трех урнах имеется 110 шариков. В первой урне шариков больше, чем во второй на столько, сколько шариков в третьей урне. Число шариков во второй урне относится к числу шариков в третьей урне, как 7:4. Сколько шариков в каждой урне?» Ответ: (55; 35; 20).

№ 10

Решите задачу: «Если школьник едет в школу на автобусе, а возвращается домой пешком, то он тратит на всю дорогу полтора часа. Если он едет туда и обратно на автобусе, то он тратит полчаса. Сколько времени потратит школьник, если он пойдёт туда и обратно пешком?» Ответ: 2,5ч.

1.2. Занятие 2. Матричный метод решения систем линейных уравнений

1.2.1. Понятие матрицы, определителя матрицы системы линейных уравнений

Для объяснения матричного метода решения систем линейных уравнений необходимо ввести понятие **матрицы**, пояснить, какие **виды** матрицы бывают, что такое **определитель матрицы**. И, конечно же, научить действиям с матрицами.

На первом занятии нужно остановиться на введении понятия матрицы, видах матрицы и познакомить обучающихся с алгоритмом матричного метода.

Но как только обучающиеся услышат термин «матрица», у них возникнут ассоциации с матрицей, о которой они уже слышали на уроках информатики, например, как об основной составляющей любого монитора, от которой зависит качество изображения. Можно не сдерживать обучающихся и позволить им поделиться своими знаниями. А затем воспользоваться представлением в виде картинок 3 самых популярных разновидностей матриц, которые активно используются в сегментах мониторов: TN, VA и IPS (как пользовательском, так и в игровом, а также профессиональном). Добавьте в этот ассоциативный ряд шахматную доску и поле для игры в «Морской бой» (Рисунок 3).

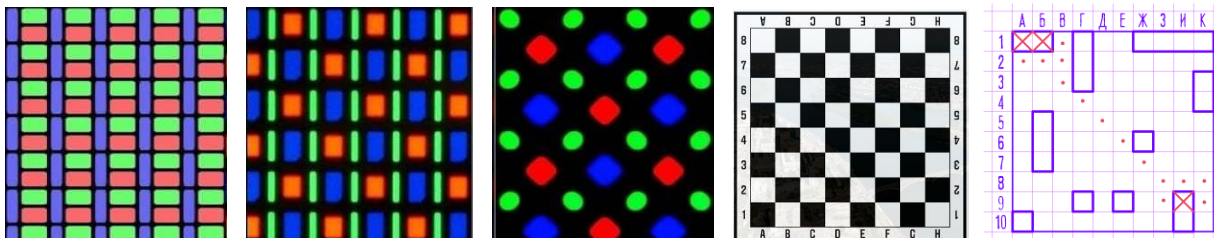


Рисунок 3

Для организации диалога, обсуждения предлагаем обучающимся следующие вопросы:

- Что общего на картинках ряда? (Форма массива)
- В чем разница? (В правилах действий с элементами)
- Можно ли шахматную доску и поле для игры в «Морской бой» назвать матрицей? (Приведите свой пример) (Можно в пример – поле для игры в «крестики-нолики»)
- Каким может быть определение матрицы? (Важно, чтобы распознали три характеристики матрицы в математике: элементы, составляющие массив, форма таблицы, указание правил действий с элементами)

Далее можно сформулировать общепринятое в математике определение матрицы: «**Матрицами** называют массивы элементов, представленные в виде прямоугольных таблиц размерами $n \times n$, для которых определены правила математических действий».

Но в рамках изучения темы «Матричный метод решения систем линейных уравнений» для грамотной записи матрицы нужно уточнить:

- элементами матрицы являются числа-коэффициенты при неизвестных, свободные члены;
- матрица обозначается одной из заглавных букв латинского алфавита;
- набор элементов матрицы помещается в круглые скобки.

Прежде, чем познакомить обучающихся с видами матриц, имеет смысл научить **составлять матрицу системы уравнений** и **распознавать элементы** (проговаривая индексы) матрицы по виду системы уравнений.

Пример:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ -x + 5y + 2z = -1 \\ 4x - y + z = 2 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad k_{22} = 5, \quad k_{32} = -1.$$

Теперь можно ввести термин «определитель матрицы» и актуализировать алгоритм нахождения определителя 3-го порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Но не нужно возвращаться к закреплению алгоритма нахождения определителя на других примерах на этом этапе. Важно ввести все виды матриц, необходимые для решения системы линейных уравнений матричным методом.

Начнем с понятия **обратной матрицы**.

Можно:

- обратиться к понятию «взаимно-обратные числа», например: 5 и $\frac{1}{5}$,
- напомнить свойство взаимно-обратных чисел, а именно: $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$,
- выдвинуть гипотезу для формулирования понятия обратной матрицы: «Если произведение матриц равно 1, то они взаимно-обратные»,
- объяснить, что проверить это свойство мы сможем на следующем занятии, когда пройдем действия с матрицами.

Но в символьном виде уже сейчас мы можем провести параллель и записать:

$A \cdot \frac{1}{A} = 1 \sim A \cdot A^{-1} = E$. Поясняем, что E — **единичная матрица**, все элементы которой

по диагонали равны 1, а остальные 0: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

A^{-1} — обратная матрица, которую нужно вычислять по шагам:

1. Разделить единицу на матричный определитель.
2. Найти транспонированную матрицу алгебраических дополнений.
3. Перемножить полученные значения.

Десятиклассники вполне спокойно воспримут понятие единичной матрицы, а вот в нахождении обратной матрицы проговаривания шагов, конечно, недостаточно. Да и непонятны эти термины, так как звучат впервые. Поэтому необходимо на конкретном примере пошагово ввести все понятия, входящие в алгоритм вычисления обратной матрицы. И делать это нужно в 10-м классе на примере системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Пример.

$$\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 6x - 5y = 11 \end{cases}$$

1. Составим **матрицу системы** и найдем **определитель матрицы системы**:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - 6 \cdot 1 = -26.$$

2. Составим **матрицу, обратную** данной, по шагам.

1) Найдем **матрицу миноров**:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

2) Составим **матрицу алгебраических дополнений**:

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ A_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Составим **транспонированную матрицу алгебраических дополнений**:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ A_{ij}^T = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычислим **обратную матрицу** по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A_{ij}^T$

$$A^{-1} = \frac{1}{-26} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{1}{26} \\ \frac{6}{26} & -\frac{4}{26} \end{pmatrix}$$

3. Найдем **решение системы** по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$,

где матрица $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ – **вектор-столбец свободных членов**.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{1}{26} \\ \frac{6}{26} & -\frac{4}{26} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15+11}{26} \\ \frac{18+(-44)}{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (1; -1).

При вычислении обратной матрицы можно предложить блок-схему с **готовым решением** и дать задание обучающимся: **распознать закономерность и сформулировать** алгоритм умножения числа на матрицу.

Аналогично можно поступить и с умножением обратной матрицы на матрицу вектор-столбец свободных членов. Желательно на блок-схемах использовать цветовую гамму.

Первое знакомство с матричным методом решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными состоялось. Закреплять метод возможно лишь после обучения действиям с матрицами.

1.2.2. Действия с матрицами

Арифметических действий в математике 4: сложение, вычитание, умножение и деление. С ними обучающиеся знакомятся на уровне начального общего образования. Но в действиях с матрицами действие «вычитание» заменяют на «сложение с противоположным числом», «деление» – на «умножение на дробь».

Объяснять и закреплять в 10 классе рекомендуем только действия с матрицами «квадратными», то есть 2×2 , 3×3 , так как это умение необходимо при решении систем двух (трех) линейных уравнений с двумя (тремя) переменными. Другие, более сложные действия обучающиеся будут изучать в вузе. И об этом нужно говорить на занятии для того, чтобы сформировалось осознание фундамента школьных знаний и умений для дальнейшего продолжения образования в вузе.

На этом занятии нужно рассмотреть следующие действия с матрицами: сложение («вычитание»), транспонирование матриц, умножение («деление») матрицы на число, умножение матрицы на вектор. Именно в такой последовательности рассмотрим действия с матрицами на примерах.

1 действие «Сложение матриц»

Пример

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Выполните сложение матриц.

Решение: $A + B = \begin{pmatrix} -3 + 4 & 2 + (-2) \\ 1 + 5 & 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание к примеру

Добавьте пропущенное слово в правиле сложения матриц.

«Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их _____ элементы.»
(Ответ: соответствующие)

б) Выполните вычитание матриц.

Решение: $A - B = \begin{pmatrix} -3 + (-4) & 2 + 2 \\ 1 + (-5) & 4 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание к примеру

Добавьте пропущенное слово в алгоритме вычитания матриц.

«Для того чтобы выполнить вычитание матриц, нужно к элементам первой матрицы прибавлять соответствующие, элементы с _____ знаком.»
(Ответ: противоположным)

2 действие «Транспонирование матриц»

Транспонирование матрицы – это операция, когда строка становится соответствующим столбцом, а столбец соответствующей строкой.

Пример

а) Составьте транспонированную матрицу A^T матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

б) Составьте транспонированную матрицу B^T матрицы $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 2 & -5 & 8 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание

Заполните недостающие элементы в транспонированной матрице:

а) $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} * & 1 \\ * & 5 \end{pmatrix}$;

б) $D = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -3 & 1 & 8 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $D^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & * \\ 9 & * & -6 \\ * & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $C^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $D^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 9 & 1 & -6 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

3 действие «Умножение матрицы на число»

Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить каждый элемент матрицы на это число.

Пример: $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание

Найдите элемент(*), если $x \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 20 \\ -5 & -30 \end{pmatrix}$. Ответ: -10.

Пример: $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 5 & \frac{1}{2} \cdot 3 \\ \frac{1}{2} \cdot (-2) & \frac{1}{2} \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание

Найдите x , если $x \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

4 действие «Умножение матрицы на вектор»

Алгоритм умножения матрицы на вектор: каждый элемент строки умножаем на элементы столбца, результаты складываем и записываем элементом вектора-столбца как результата.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Найдем произведение $A \cdot B$.

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 8 + 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 8 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Задание

Найдите элемент матрицы C , если

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} * & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ -1 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \end{pmatrix}. \quad \underline{\text{Ответ:}} \ 4.$$

Рассмотрев на примерах необходимые для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными действия с матрицами, можно предложить обучающимся:

- записать самостоятельно эти действия в символьном виде;
- ответить на вопрос: какими свойствами обладают эти действия (переместительное, умножение на 0, умножение на 1, другие);
- разобрать действия с матрицами для квадрата 3×3 .

1.2.3. Тренажер по теме «Решение систем линейных уравнений матричным методом»

№ 1.

Найдите матрицу, обратную данной: $F = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

Ответ: $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}.$

№ 2.

Найдите транспонированную матрицу алгебраических дополнений, если исходная матрица $H = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$

Ответ: $H_{ij}^T = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$

№ 3.

Найдите матрицу миноров матрицы $S = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответ: $M = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

№ 4.

Найдите матрицу алгебраических дополнений матрицы $D = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $D_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

№ 5.

Найдите сумму матриц $Q = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ и $U = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

№ 6.

Найдите произведение матрицы $N = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$ на вектор $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 19 \\ 12 \end{pmatrix}$.

№ 7.

Решите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными матричным

методом: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$. Ответ: $(-2; 3)$.

№ 8.

Решите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными матричным

методом: $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 6x - 5y = 11 \end{cases}$. Ответ: $(1; -1)$.

№ 9.

Решите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными матричным

методом: $\begin{cases} 5x + 6y = 0 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$. Ответ: $(-12; 10)$.

№ 10.

Решите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными матричным

методом: $\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$. Ответ: $(-11; 31)$.

1.3. Занятие 3. Метод Гаусса

1.3.1. Методика введения метода Гаусса для решения системы линейных уравнений при условии $n \geq 2$ методом Гаусса

Изучение матричного метода решения систем линейных уравнений в школьном курсе ограничивается квадратом 2×2 . Однако в задачах часто приходится составлять систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Поэтому считаем возможным добавить к методу Крамера и матричному методу решения систем линейных уравнений ещё и метод Гаусса – классический метод решения систем линейных уравнений, открытый немецким ученым Карлом Фридрихом Гауссом. Представим методику введения метода Гаусса в виде последовательности действий учителя в ознакомлении обучающихся с дополнениями содержания школьной программы.

Действия учителя:

- познакомить обучающихся с ещё одним видом матрицы – **расширенная матрица**.

Пример:

а) $\begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ -x + 6y = -2 \end{cases}$, $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 8 \\ -1 & 6 & -2 \end{array} \right)$ – **расширенная матрица**, то есть матрица, составленная

из коэффициентов при неизвестных (до черты) и свободных членов (за чертой);

б) $\begin{cases} x - 4y + 5z = 1 \\ -2x + 6y - z = -1 \\ 4x + y + 3z = 0 \end{cases}$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right)$ – **расширенная матрица**;

- познакомить с концепцией решения систем линейных уравнений: последовательным исключением неизвестных, приведением расширенной матрицы системы линейных уравнений к виду:

а) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$; б) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ – «треугольный вид» или «трапецевидный»;

- познакомить с основными правилами элементарных преобразований матрицы:
 - строки матрицы можно переставлять местами;
 - если после преобразований появились нулевые, одинаковые или пропорциональные строки, то их можно удалить из матрицы;
 - к строке матрицы можно прибавить другую строку, умноженную на какое-либо число;
- продемонстрировать метод Гаусса сначала на системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными, а затем на системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}, \quad A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 8 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right);$

Тогда: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 \cdot 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$

Ответ: (2; 1).

б) $\begin{cases} x - 2y + 6z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = 3 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}, \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \rightarrow$
 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right);$

Тогда: $\begin{cases} x - 2y + 6z = 2 \\ -2x + 4y - 5z = 3 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 6z = 2 \\ 7y - 8z = 6 \\ 7z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 6z = 1 \\ 7y = 14 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x - 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}.$

Ответ: (-1; 2; 1).

Все действия с расширенной матрицей нужно проговаривать с обучающимися и записывать на первом занятии.

Для примера запишем действия пункта (б):

- 1) умножим вторую строку расширенной матрицы на 2 и сложим с третьей строкой, результат запишем в третью строку;
- 2) умножим первую строку на 2 и сложим со второй строкой, результат запишем во вторую строку;
- 3) поменяем вторую и третью строки местами;
- 4) запишем исходную систему с обновленными коэффициентами и свободными членами;
- 5) последовательно (начиная с третьей строки) находим неизвестные, решая линейные уравнения; записываем ответ.

1.3.2. Алгоритм метода Гаусса для решения систем линейных уравнений при условии $n \geq 2$

Для того чтобы у обучающихся не было сомнений в эффективности решения систем линейных уравнений методом Гаусса, на уроке используется прием сравнения решения одной и той же системы линейных уравнений разными способами. Для наглядности можно предложить обучающимся решить систему сначала только что изученным матричным методом, а затем методом Гаусса.

Решим систему
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}.$$

Решение матричным методом

1. Составим матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

2. Найдем определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} |A| &= (5 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \cdot 3) - (4 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 1) \\ &= (20 - 3 - 12) - (-8 + 45 - 2) = 5 - 35 = -30; \end{aligned}$$

3. Найдем транспонированную матрицу алгебраических дополнений:

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix};$$

4. Найдем обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^T$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

5. Умножим обратную матрицу на вектор-столбец свободных членов:

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot 0 + 1 \cdot 14 + 1 \cdot 16}{30} \\ \frac{-10 \cdot 0 + (-14) \cdot 14 + 16 \cdot 16}{30} \\ \frac{5 \cdot 0 + 19 \cdot 14 + (-11) \cdot 16}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

Таким образом: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$

Ответ: (1; 2; 3).

Решение методом Гаусса той же системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу системы и выполним элементарные

преобразования до получения «треугольного вида из 0»: $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right);$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right),$$

- 1) Умножили в первой матрице вторую строку на (-5) , сложили с первой строкой и записали новой второй строкой во второй матрице.
- 2) Умножили в первой матрице вторую строку на (-4) , сложили с третьей строкой и записали новой третьей строкой во второй матрице.
- 3) Умножили во второй матрице новую третью строку на $(-2,2)$, сложили с новой второй строкой и записали третьей строкой в последней матрице.

Получили обновленную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ -11y - 16z = -70 \\ 6z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ -11y - 16 \cdot 3 = -70 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2 - 3 = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Ответ: (1; 2; 3).

1.3.3. Тренажер по теме «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

№ 1. $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases} . \quad \underline{\text{Ответ:}} (3; 5; 4).$

№ 2. $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y = -2 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases} . \quad \underline{\text{Ответ:}} (-1; 1; 3).$

№ 3. $\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ -x - 3y + 2z = -7 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} . \quad \underline{\text{Ответ:}} (2; -1; -4).$

№ 4. $\begin{cases} x + 5y + 2z = 4 \\ -2x - y + 4z = -15 \\ -x + 3y + z = -2 \end{cases} . \quad \underline{\text{Ответ:}} (3; 1; -2).$

$$\text{№ 5.} \quad \begin{cases} 4x - y + 2z = -1 \\ 3x + y - 4z = -3 \\ -x + 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad \underline{\text{ОТВЕТ:}} (0; 5; 2).$$

$$\text{№ 6.} \quad \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ -3x + y + 10z = -3 \end{cases} \quad \underline{\text{ОТВЕТ:}} (4; -1; 1).$$

$$\text{№ 7.} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x + 4y - 2z = -10 \\ -x + 5y - 2z = -6 \end{cases} \quad \underline{\text{ОТВЕТ:}} (-2; 0; 4).$$

$$\text{№ 8.} \quad \begin{cases} 5x + y - 2z = -5 \\ 2x - y - z = 3 \\ -4x + 2y + 3z = -3 \end{cases} \quad \underline{\text{ОТВЕТ:}} (1; -4; 3).$$

$$\text{№ 9.} \quad \begin{cases} 3x - 2y - 4z = 5 \\ -x + 5y + 2z = 2 \\ 6x - 4y - z = 3 \end{cases} \quad \underline{\text{ОТВЕТ:}} (1; 1; -1).$$

$$\text{№ 10.} \quad \begin{cases} x - 4y - 2z = 2 \\ -3x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = -6 \end{cases} \quad \underline{\text{ОТВЕТ:}} (-2; 1; -4).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из приоритетных задач современного образования – формирование функциональной грамотности у школьников.

Данная тема позволит сформировать у обучающегося умения, необходимые для современного специалиста в любой области: оценивать ситуацию, выстраивать стратегию решения задачи, делать выбор рационального подхода к решению задачи и осознанно выполнять задачу, оценивая свои возможности.

Кроме того, введение данной темы в школьный курс математики – возможность организовать внеурочную деятельность, на занятиях которой можно предложить обучающимся выполнить проекты, способствующие саморазвитию и самосовершенствованию. Это могут быть коллективные проекты, например, о жизни и деятельности ученых-математиков, принимавших участие в создании и развитии линейной алгебры (Уильям Гамильтон, Артур Кэли, Вейерштрасс, Жордан, Фробениус, Джеймс Сильвестр, Габриэль Крамер, Карл Фридрих Гаусс и другие ученые); или о применении знаний и умений решать системы уравнений в различных областях жизни, профессиях, науке. Такая деятельность позволит обучающимся в более полной мере раскрыть свой потенциал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федеральная рабочая программа среднего общего образования по математике (углубленный уровень):
[20_ФРП_Математика-10-11-классы_угл.pdf \(edsoo.ru\)](#);
2. Тематический классификатор содержания образования. – URL:
https://edsoo.ru/Tematiceskij_klassifikat.htm;
3. Методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студентов мат. специальностей пед. вузов и ун-тов/Г.И. Саранцев. М.: Просвещение, 2002. 224с.;
4. Курс высшей алгебры/А.Г. Курош, М.: Наука, 1965. – 431 с.
<https://alexandr4784.narod.ru/kag2.html>.